円　周　率

９８Ｅ１３０３６　平川　芳昭

Ⅰ．はじめに

中学校の実習で、円周率πについての授業をした。教材研究の際、私は円周率の歴史に興味をもった。

「円周の長さは直径の何倍か」この疑問に対し、多くの学者が挑んでいった。そして今では少数点以下何億という桁まで求められている。正多角形から円周率を求める時代を経て、現在ではコンピュータによる計算で円周率を求めている。

この歴史から、算数科教育で円周率を取り扱うにあたり、どのように指導したらよいか考えていく。

Ⅱ．研究方法

（１）円周率の歴史について、文献やインターネットを利用して調べる。

（２）文献を参考に、円周率の指導法を考える。

Ⅲ．研究内容

（１）円周率の歴史

①紀元前について

円周率は、旧約聖書の列王紀上でソロモン王が神殿を構築した話にでてくる。ソロモン王は、青銅の細工士ヒラムをよびよせて、たくさんの仕事を命じた。ヒラムの行った仕事の１つに、海の鋳造がある。この海とは、神殿の外庭にあり、神殿に入る人々に儀式的な清めの水を提供するために作られたつぼのようなものである。この海の形は円形で、大きさは直径が 10 キュービット、高さが 5 キュービット、周囲は 30 キュービットであった。直径 10 キュービット、周囲 30 キュービットから、円周率は 3 ということになる。ソロモン王が統治をしていたのは、紀元前 961 年～紀元前 922 年である。この時代には、円周率 3 という数字を得ていた。しかし、それ以前に円周率 3 というのを古代の人は知っていたのである。

紀元前 2000 年のバビロニアでは､円周率 3 を使っていたとされている。円に内接する六角形の周の長さは半径の 6 倍である。このことから、円周率は 3 より少し大きいということを得た。しかし、たいていの場合は 3 で用が足りていたようだ。

古代エジプトにおいては、πの近似値として（16／9）^{2} を得ていた。この求め方は次のようである。

まず、直径が 9 の円がある。次に、その円に外接する正方形を描く。そして、正方形を縦と横にそれぞれ 3 等分する。すると、1 辺が 3 の正方形が 9 個できる。今度は、9 つの正方形のうち、四隅の正方形からそれぞれのかどを切り捨てる。そうすると、下の図 1 のような八角形ができる。できた八角形と円の面積は近似する。

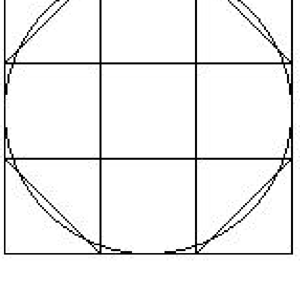

図１

この八角形は、面積が９の正方形５つと面積が９／２の三角形４つで構成されている。したがって、八角形の面積は63となる。63は１辺が８の正方形の面積64に近似する。このように考えると、直径９の円の面積はおよそ64となる。

この円の半径は９／２である。これらを元に計算すると、

$$\pi \cdot (9/2)^2 = 64$$

となる。この計算から、円周率を求めると $(16/9)^2$ を得ることができる。

古代中国の場合、中国最古の数学書『周髀算経』においても、『九章算術』においても、円周率として３が使われていた。『周髀算経』が書かれた正確な年は不明で、紀元前 1122年～紀元前256年の周の時代と諸説にある。一般には紀元前 350 年と考えられている。『九章算術』は紀元前250年ごろに書かれたとされている。

年代は不明であるが、ローマのビトリービウスが円周率を３＋（１／８）とした。

②アルキメデスの方法

アルキメデス

アルキメデスは紀元前287年にシチリア島の都市国家シュラクサイに生まれた。アルキメデスにまつわる「黄金の冠」は有名な話である。彼の死は、第２次ポエム戦争中の紀元前212年であった。マルケルスに指揮されたローマ軍がシュラクサイを陥落した際にローマ兵士によって殺された。

アルキメデスは、さまざまな功績をあげた。この功績のなかに円周率がある。円周率の歴史のなかで最も有名な人物が、アルキメデスである。アルキメデスは次のように円周率を求めた。

まず、円の内側と外側に接する正多角形を描いた。円の周の長さは内接する正多角形の周の長さより長い。また、外接する正多角形の周の長さより短い。この事実から、円周の長さの近似値を計算した。

アルキメデスは最初に、円に内接する正六角形と外接する正六角形で円周率を計算した。（図２）このときの円周率の値は

$$3 < \pi < 2\sqrt{3}$$

となる。

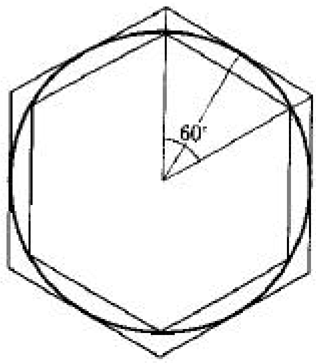

図２

円をきちんと定義すると、極限をとる操作が必要となる。つまり、多角形の角数をどんどん増やしていけばいくほど、円に近い形になる。そこでアルキメデスは、角数を12、24、48と増やしていく。最終的には正96角形を描き、円周率を求めた。そして、円周率の近似値を次のように求めた。

$$3 + (10/71) < \pi < 3 + (1/7)$$

これを小数にして表すと、

$$3.1408\cdots < \pi < 3.1428\cdots$$

となる。このことから、円周率は3.14…となり、小数点以下２桁まで正確に計算された。

③正多角形から求める

アルキメデスより後に、正多角形から円周率を求めた人とその結果は以下の通りである。

年代	人名	多角形	結果
3c	劉徽	1536	3.1416
5c	アリヤバッタ	384？	3.14156
6c	祖冲之	？	3.141592
7c	ブラーマグプタ	96？	√10
12c〜13c	フィナボッチ	96	3.1418…
1596	ルドルフ	$60 \cdot 2^{29}$	20桁
16c	ヴィエート	$6 \cdot 2^{16}$	9桁
16c〜17c	アドリエン	2^{30}	15桁
1621	ルドルフ	2^{62}	35桁
1663	松村茂清	2^{15}	6桁
1712	関孝和	2^{17}	10桁
1722	鎌田俊清	2^{44}	25桁

注）桁数は小数点以下

円に内接・外接する正多角形から計算する方法で、最も多くの桁数を求めたのがドイツのルドルフであった。彼は1539年に生まれ、1610年に亡くなった。この71年という生涯を円周率の計算に費やした。まず、1596年に正60×2^{29}角形から小数点以下20桁まで求めた。その後も円周率の計算を続けた。彼が死んだ後、1621年に小数点以下35桁まで求めた値が載せられた本が出版された。このときに用いた正多角形は正2^{62}角形である。（2^{62}＝461京1686兆184億2738万7904）このように、彼は円周率の計算に異常なまでの情熱をそそいだ。そのことから、ルドルフの墓石には円周率が刻まれた。また、ドイツでは円周率のことを、彼の名前をとって「ルドルフ数」と呼んでいる。

この方法で円周率を計算した日本人に松村茂清、関孝和、鎌田俊清がいる。

松村茂清はアルキメデスの方法で三平方の定理を利用して計算した。そして1663年に正2^{15}角形から小数点以下6桁まで求めた。

関孝和は正四角形から始めた。そして、倍々に角数を増やしていった。最終的に、正2^{17}角形まで計算した。この計算から、小数点以下10桁まで求めた。このことは、1712年に出版された『括要算法』で発表された。

鎌田俊清は2^{44}角形から、小数点以下25桁まで求めた。

アルキメデスからルドルフまでの約2000年間で、桁数は2桁から35桁まで伸びた。

円に内接・外接する正多角形から円周率を計算していくなかで、フランスのヴィエートが円周率を表す公式を発見した。彼は正多角形の角数を増やしていくとき、その周の長さの増え方に規則性があることに気付いた。このことが、後の無限級数を利用して円周率を計算することにつながっていく。

④現在の円周率

17世紀にイギリスのニュートンとドイツのライプニッツにより、微分積分が発明された。これを用いると、関数を無限級数で表すことができる。この無限級数を利用し、円周率を計算したのがニュートンである。ニュートンは1665年に16桁まで計算した。

生涯を円周率の計算に費やしたルドルフの記録は、1699年シャープに更新された。シャープは桁数を2倍近く伸ばし、71桁まで求めた。

無限級数を用いた計算した人の中に日本では建部賢弘と松永良弼がいる。

建部賢弘はオイラーの無限級数を利用して計算した。そして1723年に41桁まで求めた。

松永良弼は1739年に51桁まで計算した。この松永良弼の51桁は、日本の和算における最高記録である。

無限級数を利用して円周率を計算した人とその結果は次の表の通りである。

年 数	人 名	桁 数
1665	アイザック・ニュートン	16
1699	アブラハム・シャープ	71
1706	ヨハン・マチン	100
1719	ド・ラグニー	127
1723	建部賢弘	41
1729	松永良弼	51
1794	ベガ	136
1824	ウイリアム・ラザフォード	152
1844	ストライスニツキイ (計算はザカリアス・ダーゼ)	200
1847	トーマス・クラウゼン	248
1853	ウイリアム・ラザフォード	440
1855	リヒテル	500
1874	ウイリアム・シャンクス	527
1946	ファーガソン	620
1947 (1月)	ファーガゾン （卓上計算機使用）	710
1947 (1月)	レビ・B・スミス ジョン・レンチ （卓上計算機使用）	819

1947 年 1 月、ファーガゾンが卓上計算機を使用して円周率を求めた。このとき求めたものは 710 桁であった。これ以降、円周率の計算はコンピュータによって行われている。

現在、最も多くの桁数を求めているのは日本人である。東京大学で研究している金田康正が 1999 年 9 月に 2061 億 5843 万桁まで計算した。実際のところ、2061 億 5843 万 163 桁まで求めた。しかし、きりのいいところで、2061 億 5843 万桁を宣言した。このときに費やした時間は、検証計算 46 時間 7 分 10 秒、主計算 37 時間 21 分 4 秒であった。プログラミングの時間を考えても、前回に発表したのが 1999 年 5 月であり、約 4 ヶ月である。この短期間にこれだけの桁数を求める技術は凄まじいものだと思う。

今後も円周率を求めて、多くの学者が挑戦し続けるだろう。

（２）円周率の指導法

前項は円周率の歴史をみてきた。この項では、これらを円周率の授業でどのように生かすかについて考える。

まず、小学生の発達段階を考えると、直感的に訴えかける方法がよい。無限級数を使い円周率を説明しても､子どもは理解できない。となると、円周率を気付かせるには直径と円周の長さを測り、計算することが最善だと考える。この作業を繰り返しているうちに、子どもは計算の値がほぼ一定であることに気付くだろう。

まず子どもに、昔の人は「円周の長さは直径の何倍か」ということを考えていたことを説明する。そこで、子どもにも同じ問題を出す。子どもはさまざまの方法を考える。また、直径や円周の長さを求めるにしても、さまざまな測り方をする。それぞれの考え方を尊重し、子どもがそれぞれの試すことが重要である。それらの中で、よりよい方法を見つけだす。

この問題を解決していくにあたり大切なことは、直径と円周の長さを正確に測ることである。これらを正確に測れなければ、正確な円周率は出てこない。そこで、教師は直径と円周の長さの測り方を理解していなければならない。

①直径の測り方

もし測りたい円の中心が分かっているのなら、直径は簡単に測ることができる。しかし、身の回りには中心が分からないものの方が多い。この場合、次の２通りの測り方がある。

・三角定規1 個と直線定規1 個で測る方法

まず、三角定規 2 個で測りたい物を挟む。

そして、直線定規を2個の三角定規が垂直になるように置く。このときの三角定規2個の幅を測ると直径を測ることができる（図3）。ある程度測りたい円が大きくなったら、三角定規2個の代わりに、直線定規2個を用いれば測ることができる。

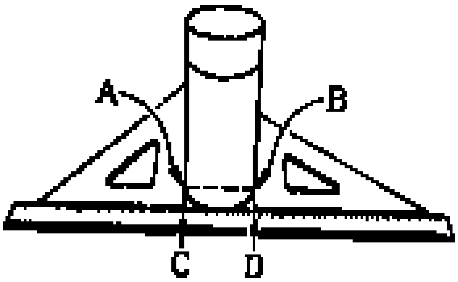

図3

・三角定規1 個で測る方法

三角定規を下の図4のように直角の頂点を円周上にあてる。そして、円周と辺との接点に印をつけ、その長さを測れば直径を測ることができる。ただし、これはある程度大きくなると測れなくなる。また、柱などを測るときもこの方法は使えない。

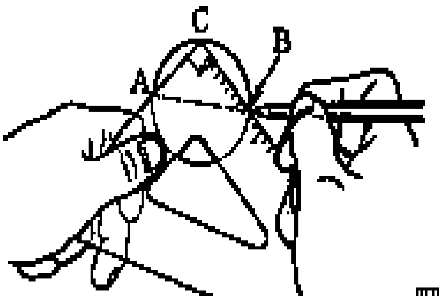

図4

②円周の長さの測り方

円周の長さを測る方法として、1つは定規に沿って転がす方法がある。もう1つは、ひもや紙テープを巻きつけ、伸ばしてから長さを測る方法である。

・定規に沿って転がす方法

この方法では、1回転では転がしているうちにずれが生じ、不正確になってしまう。何回か転がし、平均を出すとより正確な値が求まる。また、自転車のタイヤなど円周の長さが大きな物になると、定規に沿って転がすことはできない。その場合、まず、まっすぐな線を引き、その上を転がすようにする。そして、その移動した距離を測れば円周を測ることができる。

・ひもや紙テープを用いて測る方法

この方法は簡単にできる。私が小学生のときも、この方法で学んだことを覚えている。しかしこの方法では、測った後に不要になったひもや紙テープが生じる。これらはごみとなってしまう。環境について考えていこうというのに、このようなごみを出す授業をしてよいわけがない。そこで私は、メジャーを使うのがよい方法だと考える。メジャーを使えば、円周の長さを簡単に測ることができる。また、ごみも生じることはない。地球に優しい授業を展開することができる。

私は、これらの方法でいくつかの物の直径と円周の長さを測り、計算した。その結果は下の表の通りである。

測った物	直径	円周の長さ	計算した値
１００円玉	2.3	7.2	3.1304347
茶筒	8.5	26.7	3.1411764
ＣD(アルバム)	12	37.6	3.1333333
掃除機のタイヤ	15.8	49.7	3.1455696
自転車のタイヤ	69.2	217.5	3.1430635

注）直径、円周の長さの単位はｃｍ

重要なことは、さまざまな大きさの物をたくさん測ることである。クラスに 30 人の児童がいて、それぞれが円状の物を持ってきたとする。そこには 30 種類の大きさが存在するのだ。また、教室から出てみると、柱やパイプや自転車のタイヤなど、たくさんのものが存在する。子どもの間でより大きな円を測ることを、またより小さな円を測ることを競ったりするであろう。この活動を通して、どの円でも近い値が出ることを気付かせることが大切だと考える。

Ⅳ．おわりに

この研究を行い、私は円周率の不思議さ、そしてその魅力を感じた。何人もの学者が円周率を解こうとする気持ちが分かる気がした。

円周率の指導法について、円周率の歴史から考えてきた。しかし、参考となるものは紀元前のものしかなかった。

だからといって、他の知識が無駄なものに終わるということはない。子どもにこういった歴史を話すことも大切なことだと思う。例えば、ルドルフが円周率を計算するのに、正 461 京 1686 兆 184 億 2738 万 7904 角形を使ったことを話すと、子どもは驚くであろう。

また、ただ話すだけでなく、クイズ形式にしても面白い。実際、私が中学校で円周率の話をしたときにクイズも取り入れた。子どもは喜んでこのクイズを考えていた。このように、授業のなかでの遊びから興味・関心をもたせるのも１つの手段だと思う。

教師は授業に関連する知識をもっている必要がある。その知識を話す・見せる・体験させることにより、興味・関心をもたせることができるのではないだろうか。できる限り楽しい授業、そして子どもが真剣に取り組める授業を心がけていくことが重要だと考える。

＜参考文献＞

・アーネスト・ゼブロウスキー　著,
松浦　俊輔　訳, 円の歴史,
河出書房新社, 2000

・上垣　渉　著, アルキメデスを読む,
日本評論社, 1999

・上野　建爾　著, 円周率πをめぐって
日本評論社、1999

・金田　康正　著, πのはなし
東京図書, 1991

・小林　空七　著, 円の数学
裳華房, 1999

＜参考ホームページ＞

・πの部屋！
http://www1.coralnet.or.jp/kusuto/PI/index.html